Théorème des valeurs intermédaires

Comment appliquer le théorème des « valeurs intermédiaires » ?

Méthode

Le théorème dit « des valeurs intermédiaires » permet de démontrer qu'une fonction prend au moins une fois une valeur donnée, c'est à dire de justifier l'existence de solution(s) pour une équation du type f(x) = k .

Il faut pour cela que la fonction soit continue sur l'intervalle considéré (ce qui est le cas pour la plupart des fonctions étudiées) et que l'on trouve deux réels a et b dont les images f(a) et f(b) encadrent k c'est-à-dire :

$$f(a) < k < f(b) \quad \text{ou} \quad f(b) < k < f(a).$$

Si l'intervalle est donné , il suffit de calculer les images des bornes (ou éventuellement les limites) .

Si il n'y a aucune indication d'intervalle , l'image de 0 (si elle existe) est simple à calculer, et en général des considérations de signe ou d'ordre de grandeur permettent de trouver rapidement une autre valeur (en général entière)

Il est bien entendu conseillé **d'utiliser la calculatrice et sa fonction « tableau »** pour rechercher ces valeurs.

Applications

1) Démontrer que l'équation $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 4$ admet au moins une solution dans [–1;0].

2) Démontrer que l'équation $\sqrt{x-3} = \dfrac{10}{x^2}$ admet au moins une solution dans $[3;+\infty[$.

3) Démontrer que l'équation $\cos x = \dfrac{x^2}{2}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Réponses

1) La fonction $f : x \mapsto x^4 + 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$

f(-1) = 7 et f(0) = 1 donc f(0) < 4 < f(-1) .
Donc l'équation f(x) = 4 admet au moins une solution dans l'intervalle [-1, 0].

2) Pour tout x de $[3;+\infty[$, $\sqrt{x-3} = \dfrac{10}{x^2} \Leftrightarrow x^2\sqrt{x-3} = 10$

Soit $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$ et k = 10 .

f est le produit de deux fonctions continues sur $[3;+\infty[$ donc f est continue sur $[3;+\infty[$.
On a : f(3) = 0 et comme f(4) = 16 alors f(3) < 10 < f(4) .
D'où, l'équation f(x) = 10 admet au moins une solution dans [3 ;4] ou encore dans $[3;+\infty[$.

3) En posant $f(x) = \cos x - \dfrac{x^2}{2}$, l'équation devient équivalente à l'équation f(x) = 0 .

f est la différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a : f(0) =1 et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi^2}{8}$ donc $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0 < f(0)$.

D'où l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans $[0;\dfrac{\pi}{2}]$ ou encore dans $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédaires

Comment préciser le nombre de solution(s) d'une équation du type f(x) = k ?

Méthode

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de la bijection permet de prouver l'existence d'une solution unique à une équation du type f(x) = k sur un intervalle donné .
Pour déterminer le nombre de solution(s) d'une telle équation, on doit appliquer une ou plusieurs fois ce théorème , sur chaque intervalle qui vérifie les hypothèses.
La fonction doit être continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré (une étude préalable des variations est donc nécessaire) .
Enfin, le réel k doit être compris entre les images ou les limites des bornes de l'intervalle.

Applications

1) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

a) Etudier les variations de la fonction f

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0.

2) Montrer que l'équation $\frac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3 = 0$ admet une et une seule équation dans $\mathbb{R}$.

Réponses :

1) a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x réel , $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
On remarque que : $f'(x) = 0$ admet les solutions $x' = -1$ et $x'' = 3$.
Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	15	↘	-17	↗	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty ;-1]$, comme $0 \in]-\infty,15]$ alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans $]-\infty,-1]$.

f est continue et strictement décroissante sur [–1 ;3] , comme $0 \in [-17,15]$ alors l'équation f(x) = 0 admet aussi une seule solution β dans [–1 ;3] .

f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$, comme $0 \in [-17,+\infty[$ alors l'équation f(x) = 0 admet encore une seule solution γ dans [–1 ;3] .

Ainsi , l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ exactement trois solutions α, β et γ tels que $\alpha < -1 < \beta < 3 < \gamma$.

2) On pose $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{3}x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{3}x^3 = +\infty$

Théorème des valeurs intermédaires

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x réel , $f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x-2)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	3	↗	$\frac{13}{3}$	↘	$-\infty$

$0 \notin [3,+\infty[$ donc l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solutions dans $]-\infty,0]$

$0 \notin \left[3,\frac{13}{3}\right]$ donc l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solutions dans $[0,2]$

f est continue et strictement décroissante sur $[2,+\infty[$, comme $0 \in [2,+\infty[$ alors l'équation f(x) = 0 admet aussi une seule solution α dans $[2,+\infty[$.

Ainsi l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Comment donner une valeur approchée d'une solution d'une équation du type f(x) = k ?

Méthode

Pour déterminer une valeur approchée d'une solution α de l'équation f(x) = k , il suffit de déterminer deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) < k < f(x_2)$.
Désignons par I l'intervalle fermé borné dont les bornes sont x_1 et x_2 .
Si f est strictement croissante sur I, alors on en déduit : $x_1 < \alpha < x_2$.
Si f est strictement décroissante sur I, alors on en déduit : $x_1 > \alpha > x_2$.
A partir de l'encadrement d'amplitude recherchée, on en déduit une valeur approchée de α à la précision demandée .

Applications

1) Montrer que l'équation $x^3 + 2x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution α dans [– 3 ; – 2] et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut .

2) Soit f la fonction définie sur [1 ; 2] par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.
   a) Etudier les variations de f
   b) Montrer que l'équation f(x) = 3 admet une solution et une seule, α , dans l'intervalle]1 ;2[.
   c) Donner, au moyen de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Théorème des valeurs intermédaires

Réponses

1) Posons $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, avec $x \in [-3,-2]$.

f est continue et dérivable sur [-3,-2] et pour tout x de [-3, -2] ,

$f'(x) = 3x^2 + 4x = 3x\left(x + \frac{4}{3}\right) > 0$ donc f est strictement croissante sur [–3 ;–2].

f(-3) = -8 et f(-2) = 1 . Comme $0 \in [f(-3) ;f(-2)]$ alors l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle [–3 ;–2] .

On a : f(-3) = -8 et f(-2) = 1.

f(-2,5) = -2,125 donc $-2{,}5 < \alpha < -2$

f(-2,25) ≈ -0,2656 donc $-2{,}25 < \alpha < -2$.

f(-2,125) ≈ 0,4356 donc $-2{,}25 < \alpha < -2{,}125$.

f(-2,18) ≈ 0,1446 donc $-2{,}25 < \alpha < -2{,}18$.

f(-2,21) ≈ -0,0257 donc $-2{,}125 < \alpha < -2{,}18$.

f(-2,20) ≈ 0,032 donc $-2{,}21 < \alpha < -2{,}20$.

Donc –2,21 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

2) a) f est continue et dérivable sur [1, 2] et pour tout x de [1, 2] , $f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

$1 \le x \le 2$ donc $1 \le x^2 \le 4$ donc $\frac{1}{2} \le x^2 - \frac{1}{2} \le \frac{7}{2}$ donc $x^2 - \frac{1}{2} > 0$

Or pour tout x de [1, 2] , $4x > 0$ donc pour tout x de [1, 2], f '(x) > 0.

D'où f est strictement croissante sur [1 ; 2].

b) On a : f(1) = 1 et f(2) = 13 , de plus $3 \in [f(1) ;f(2)]$ donc l'équation f(x) = 3 admet une unique solution α dans] 1 ; 2 [.

c) A l'aide de la calculatrice, on obtient $f(1{,}4142) \approx 2{,}9998$ et $f(1{,}4143) \approx 3{,}0007$.

$3 \in [f(1{,}4142) ;f(1{,}4143)]$ donc $1{,}4142 < \alpha < 1{,}4143$.

Donc une valeur approchée par défaut de α à 10^{-3} près est 1,414.